

Lineare Algebra II

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 12

MORITZ FLEISCHMANN

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov, Katharina Novikov und Oliver Hendrichs im Sommersemester 25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de. Verteilung der Lösungen ist erlaubt und erwünscht.

Wie üblich, wenn das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden. Es gilt grundsätzlich, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, $a \in \mathbb{K}$ und

$$A_a := \begin{pmatrix} a+2 & a+1 \\ a^2-a-2 & a^2-a-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$$

1. Finde die Jordansche Normalform von A_a .
2. Finde eine Jordanbasis für A_a .
3. Finde die Jordan-Chevalley Zerlegung von A_a .
4. Finde alle A_a -invarianten Unterräume von $\mathbb{K}^2$.

Lösung:

Wir werden nicht für jede JNF explizit erwähnen, dass man die Blöcke auch permutieren könnte, sondern geben nur eine einzelne mögliche Antwort an.

1. Für die Bestimmung der Jordanschen Normalform wenden wir den Algorithmus an, soweit er mit Parametern anwendbar ist, bis wir eine Fallunterscheidung vornehmen müssen. Wir beginnen mit der Bestimmung des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= (X - a - 2)(X - a^2 + a + 1) - (a^2 - a - 2)(a + 1) \\ &= X^2 - (1 + a^2)X + a^2 = (X - 1)(X - a^2) \end{aligned}$$

also hat A_a die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a^2$. Die Jordansche Normalform hängt nun davon ab, welchen Wert a annimmt.

- $a^2 \neq 1$: In diesem Fall gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und wir haben zwei verschiedene Eigenwerte. Damit ist die Matrix aber immer diagonalisierbar und daraus folgt

$$J_{A_a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

- $a = -1$: In diesem Fall ist die Matrix bereits in Diagonalform: Setzen wir $a = -1$ in die

Definition von A_a ein, erhalten wir

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit gilt $J_{A_{-1}} = A_{-1}$.

- $a = 1$: In diesem Fall gilt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

also nicht diagonal. Eine $n \times n$ -Matrix mit einem n -fachen Eigenwert λ ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie eine Skalarmatrix ($= \lambda \mathbb{1}_n$) ist. Also ist A_1 nicht diagonalisierbar und als einzige Möglichkeit bleibt

$$J_{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ bestimmen wir die Dimension des Eigenraums $\text{Eig}_1(A)$ durch

$$A_1 - \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A_1 - \mathbb{1}_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

also $\dim \ker(A_1 - \mathbb{1}_2) = 1$, das heißt es gibt nur einen Jordanblock.

Damit haben wir alle Fälle abgedeckt.

2. Wir bestimmen zuerst allgemein Eigenvektoren:

$$A_a - \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 \\ a^2-a-2 & a^2-a-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A_a - \mathbb{1}_2) = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=: v_1}$$

$$A_a - a^2 \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} -a^2+a+2 & a+1 \\ a^2-a-2 & -a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A_a - a^2 \mathbb{1}_2) = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ a-2 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=: v_2}$$

Wir beachten, dass die beiden so gefundenen Eigenvektoren v_1 und v_2 genau dann linear abhängig sind, wenn $a-2 = -1$ gilt, also wenn $a = 1$; und nehmen nun wieder eine Fallunterscheidung vor:

- $a \neq 1$: In diesem Fall ist die Matrix diagonalisierbar, also besteht die Jordanbasis aus zwei Eigenvektoren. Da $a \neq 1$ sind die Vektoren v_1, v_2 linear unabhängig, bilden also bereits eine Basis aus Eigenvektoren und damit unsere Jordanbasis.
- $a = 1$: Nur für $a = 1$ ist die Matrix nicht diagonalisierbar und wir müssen eine Jordanbasis bestimmen, die aus einem Eigenvektor und einem Hauptvektor zweiten Grades besteht. Man beachte hier auch, dass die beiden gefundenen Eigenvektoren v_1 und v_2 zusammenfallen - das zeigt, wieso wir in diesem Fall keine Diagonalisierbarkeit haben können. Wir wählen nun also einen Hauptvektor zweiten Grades $w_2 \in \ker(A - 1)^2 \setminus \ker(A - 1)$.

Es ist nicht nötig $(A-1)^2$ explizit auszurechnen, da wir bereits wissen, dass $(A-1)^2 = 0$ gelten muss. Das heißt $\ker(A-1)^2 = \mathbb{K}^2$ und wir können

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wählen da dieser Vektor orthogonal zu dem Eigenvektor v_1 liegt. Wir bestimmen den dazugehörigen Eigenvektor durch

$$w_2 = (A - \mathbb{1}_2)w_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und w_1, w_2 bilden eine Jordanbasis.

3. Um die Jordan-Chevalley-Zerlegung zu bestimmen müssen wir jeweils den diagonalisierbaren und den nilpotenten Anteil von A_a bestimmen. Wir nennen ersteren D_a und letzteren N_a . Es ist wichtig, dass wir diesen Anteil jeweils in der ursprünglichen Basis, nicht in der Jordanbasis ausrechnen.

- $a \neq 1$: In diesem Fall ist die Matrix als ganzes diagonalisierbar (da diagonal) und somit gilt $D_a = A_a$ und $N_a = 0$.
- $a = 1$: Da A_1 nicht diagonalisierbar ist, werden wir die Zerlegung zuerst für die JNF vornehmen und dann aus der Jordanbasis in die ursprüngliche Basis zurücktransformieren. Wir wählen die Transformationsmatrix

$$T := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen die Inverse:

$$T^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$J_{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: \hat{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{N}}$$

und wir transformieren diese Matrizen nun zurück in die Ursprungsbasis. Da $\hat{D} = \mathbb{1}_2$ in allen Basen gleich aussieht, müssen wir nur $\hat{N}$ rücktransformieren:

$$N = T\hat{N}T^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

womit wir die Jordan-Chevalley Zerlegung bestimmt haben.

Wir befinden uns hier in einem besonderen Fall: Da A_1 nur einen einzigen Eigenwert hat, können wir ausnutzen, dass $\hat{D}$ basisinvariant ist und somit $\hat{D} = D$ gilt. Das heißt aber auch, dass $A_1 = D + N$ und damit $N = A_1 - D$ gilt und erhalten so N ohne eine Basistransformation durchzuführen - haben wir es mit der JC-Zerlegung einer Matrix mit mehr als einem Eigenwert zu tun funktioniert dieser Trick nicht notwendigerweise.

4. Unabhängig von der Matrix B sind $0, \mathbb{K}^2$ immer B -invariante Unterräume, das gilt also natürlich auch für A_a . Wir wollen mittels Fallunterscheidung alle A_a -invarianten Unterräume von $\mathbb{K}^2$ finden:

- $a^2 \neq 1$: Neben 0 und $\mathbb{K}^2$ wissen wir, dass Eigenvektoren A_a -invariante Räume erzeugen, also sind $\langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle$ ebenfalls A_a -invariante Unterräume. Es kann keine weiteren Unterräume geben, denn:

Ein Unterraum von $\mathbb{K}^2$ hat Dimension $0, 1$ oder 2 . Es gibt je nur einen 0 - und 2 -dimensionalen Unterraum, diese haben wir aber schon aufgelistet. Das heißt jeder weitere invariante Unterraum müsste Dimension 1 haben, wird also von einem eigenen Vektor erzeugt, das heißt er hätte die Form $\langle w \rangle$. Dann wäre aber $A_a w \in \langle w \rangle$ und damit w ein Eigenvektor. Das kann aber nicht sein!

- $a = -1$: In diesem Fall gilt $A_{-1} = \mathbb{1}_2$ also sind alle Unterräume invariant.
- $a = 1$: Natürlich sind 0 und $\mathbb{K}^2$ wieder A_1 -invariant und da v_1 ein Eigenvektor ist, ist auch $\langle v_1 \rangle$ ein invarianter Unterraum. Es kann keine weiteren Unterräume geben, da diese 1 -dimensional sein müssten, also von der Form $\langle w \rangle$ für $w \in \mathbb{K}^2$ und damit wäre w ein Eigenvektor, es kann allerdings keine weiteren geben.

Damit haben wir erneut alle Fälle behandelt.

Aufgabe 2

Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$A_a = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

1. Finde eine Basis in der A_a diagonal ist.
2. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A_a ein Skalarprodukt?

Lösung:

1. Da A_a symmetrisch ist wissen wir bereits, dass A_a diagonalisierbar ist und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren existiert. Wir wollen also diese Eigenvektoren bestimmen. Zuerst die Eigenwerte via

$$\chi_A(X) = (2 - X)^2 - a^2 = (2 - a - X)(2 + a - X)$$

und damit $\lambda_1 = 2 - a, \lambda_2 = 2 + a$. Das sind jeweils zwei unterschiedliche Eigenwerte, außer für $a = 0$, aber in diesem Fall ist A_2 bereits diagonal.

Wir bestimmen nun Eigenvektoren:

$$A_a - \lambda_1 \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A_a - \lambda_1 \mathbb{1}_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A_a - \lambda_2 \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A_a - \lambda_2 \mathbb{1}_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und da diese Vektoren unabhängig von a sind, bilden sie in allen Fällen eine Diagonalbasis von A_a .

2. Ein Skalarprodukt ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform, also prüfen wir diese drei Eigenschaften für $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A_a}$.

- *Bilinearität*: Die Abbildung $(x, y) \mapsto \langle x, By \rangle$ ist für jede Matrix B bilinear, also auch für A_a , hier gibt es nichts weiter zu prüfen.
- *Symmetrie*: Die Abbildung $(x, y) \mapsto \langle x, By \rangle$ ist für eine Matrix B genau dann symmetrisch, wenn B symmetrisch ist. Unabhängig von a ist $A_a^T = A_a$, das heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A_a}$ ist symmetrisch.
- *Positiv Definit*: Die Abbildung $(x, y) \mapsto \langle x, By \rangle$ ist für eine Matrix B genau dann positiv definit, wenn B positiv definit ist, also müssen wir die positive Definitheit von A_a überprüfen. Wir können die positive Definitheit entweder direkt überprüfen indem wir das Ergebnis von $\langle x, x \rangle_{A_a}$ für ein allgemeines $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bestimmen, oder indem wir die Eigenwerte von A_a bestimmen, denn eine symmetrische Matrix B ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Wir wollen hier der Vollständigkeit halber beide Methoden zeigen:

- Um das Ergebnis direkt zu bestimmen: Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben. Sei $v = (x, y)$. Um die Sache zu vereinfachen nehmen wir an, dass v normiert ist. Das Ergebnis bleibt unverändert, denn:

$$\left\langle \frac{v}{\|v\|}, A_a \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v\|^2} \langle v, A_a v \rangle$$

und da $\|v\| > 0$ gilt, ändert sich das Vorzeichen nicht. Wir bestimmen nun:

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle_{A_a} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + ay \\ ax + 2y \end{pmatrix} = 2(x^2 + y^2) + 2axy \end{aligned}$$

also müssen wir alle a bestimmen für die $2(x^2 + y^2) + 2axy > 0$ gilt. Wir teilen diese Ungleichung durch 2. Da v ein normierter Vektor ist, gibt es einen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$, sodass $x = \sin(\varphi)$, $y = \cos(\varphi)$ gilt. Es gilt damit $x^2 + y^2 = 1$ und wir verwenden die trigonometrische Identität $\sin(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)$. Die Ungleichung ist also äquivalent zu

$$1 + \frac{1}{2}a \sin(2\varphi) > 0 \Leftrightarrow a \sin(2\varphi) > -2$$

Da φ jeden beliebigen Wert annehmen kann, nimmt $\sin(2\varphi)$ alle Werte zwischen -1 und 1 an, das heißt diese Ungleichung ist für

$$-2 < a < 2$$

erfüllt und für genau diese a ist auch A_a positiv definit.

- Um der Ergebnis über Eigenwerte zu bestimmen: Wir kennen die Eigenwerte bereits aus der ersten Teilaufgabe. Wir müssen also a finden, sodass gleichzeitig $2 - a > 0$ und $2 + a > 0$ gelten. Aus der ersten Ungleichung erhalten wir $2 > a$, aus der zweiten erhalten wir $-2 < a$, also ist unsere Matrix genau dann positiv definit, wenn $-2 < a < 2$ gilt.

Aufgabe 3

1. Sei $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\theta \in [0, 2\pi[$. Sei $\rho(v, \theta)$ die Rotation um den Winkel θ bezüglich der Achse $\langle v \rangle$. Zeige, dass eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ existiert in der $\rho(v, \theta)$ als

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\rho(v, \theta)) =: R(v, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dargestellt wird.

2. Sei $A \in SO(3)$. Zeige, dass ein $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und ein $\theta \in [0, \theta[$ existieren, sodass $A = \rho(v, \theta)$.

Lösung:

1. Der Vektor v wird von einer Rotation um die Achse v nicht beeinflusst, also ist $\langle v \rangle$ ein $\rho(v, \theta)$ -invarianter Raum. Sei $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$, dann ist $\{\hat{v}\}$ eine Orthonormalbasis von $\langle v \rangle$.

Mit Aufgabe 4 vom zwölften Tutoriumsblatt wissen wir, dass auch $\langle v \rangle^T$ ein $\rho(v, \theta)$ -invarianter Raum ist. Laut Aufgabe 2 vom zehnten Übungsblatt können wir $\hat{v}$ zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} := \{\hat{v}, v_2, v_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ vervollständigen. Da $\mathcal{B}$ eine ONB ist, liegen v_2 und v_3 in $\langle v \rangle^T$ und da sie orthogonal zueinander (und damit natürlich linear unabhängig voneinander) sind und $\dim(\langle v \rangle^T) = 2$ gilt, sind sie auch eine Basis dieses Unterraums.

Wir betrachten nun $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\rho(v, \theta))$. Da sowohl $\langle v \rangle$ als auch $\langle v \rangle^T$ invariant bezüglich dieser Abbildung sind, nimmt die darstellende Matrix Blockdiagonalform ein, wobei ein Block $\langle v \rangle$ und der andere dem orthogonalen Komplement entspricht. Da die Rotation auf $\langle v \rangle$ als Identität wirkt, gilt somit

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\rho(v, \theta)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun $\rho(v, \theta)|_{\langle v_2, v_3 \rangle}$ als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Diese eingeschränkte Abbildung ist immer noch eine Rotation um den Winkel θ , aber nun in zwei Dimensionen um den

Nullpunkt herum. Mit Aufgabe 4 vom elften Tutoriumsblatt wissen wir, dass damit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

gilt. Das heißt $\mathcal{B}$ erfüllt unsere Anforderungen.

2. Sei $A \in SO(3)$ gegeben. Wir wissen, dass damit $\chi_A(X)$ ein reelles Polynom dritten Grades ist und deswegen eine reelle Nullstelle λ besitzt. Sei $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ der normierte Eigenvektor, sodass $Av = \lambda v$. Wir können diesen Vektor zu einer ONB von $\mathbb{R}^3$ ergänzen, sei also $\mathcal{B} = \{v, v_2, v_3\}$ eine ONB, dann ist $\langle v \rangle^T = \langle v_2, v_3 \rangle$ ein A -invarianter Unterraum, das heißt es gilt

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

Wir nennen

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Außerdem wissen wir, dass A eine Isometrie ist, also gilt auch

$$\lambda^2 \langle v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle$$

also muss $\lambda \in \{\pm 1\}$ gelten. Da A eine Isometrie ist, muss auch $\det(A) = 1$ gelten. Es gilt $\det(A) = \lambda \det(B)$, also gilt $\det(B) = \lambda^{-1} = \lambda$.

Angenommen es gilt $\lambda = -1$, dann also auch $\det(B) = -1$ und damit ist B eine Spiegelung auf $\langle v_2, v_3 \rangle$. Eine Spiegelung in $\mathbb{R}^2$ hat immer einen Eigenwert 1 und einen Eigenwert -1 . Das heißt in diesem Fall existiert auf jeden Fall ein Eigenwert 1.

Wir nehmen ObdA an, dass wir $\lambda = 1$ gewählt haben (die beiden anderen Eigenwerte sind dann entweder beide -1 oder beide 1), dann gilt auch $\det(B) = 1$ und B ist eine Rotation. Eine Rotation B hat allerdings immer die darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und damit gilt

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(A) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(\rho(v, \theta))$$

wobei v und θ den in dieser Aufgabe bestimmten Größen entsprechen.

Zum Abschluss will ich noch ein paar Rechenregeln und -Hinweise wiederholen die hilfreich sein können: Diese Liste erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit! Ich gehe hierbei nicht auf die Theorie hinter den Sachen ein und behandle auch keine Gruppen/Ringe.

- Allgemeine Rechentipps:

1. Es ist oftmals hilfreich, wenn man von Anfang an mit normierten Vektoren rechnet. Wenn man beispielsweise einen euklidischen Vektorraum V gegeben hat und frei eine Basis dieses Vektorraums wählen kann, dann ist es oft hilfreich und kostenlos eine Orthonormalbasis zu wählen.

2. Es gibt sehr viele trigonometrische Identitäten und die meisten davon braucht man zu selten um sie auswendig zu können. Aber man sollte sich merken, dass für jeden Winkel $\phi \in \mathbb{R}$

$$\cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2 = 1$$

gilt.

3. Oft kann man sich Zeit sparen indem man nur das ausrechnet, was auch wirklich gefragt ist: Wird in einer Aufgabe explizit nach einer Jordanbasis gefragt, dann ist es ausreichend die Basis anzugeben. Solange nicht danach gefragt wird, ist es bspw. nicht notwendig auch das Inverse der Transformationsmatrix zu bestimmen.
4. Hat man dagegen noch genug Zeit, kann es oft hilfreich sein seine Ergebnisse zu überprüfen. Muss in einer Aufgabe eine Transformationsmatrix mit Inverser angegeben werden, dann macht es oft Sinn $S^{-1}S = \mathbb{1}_n$ oder $S^{-1}AS = J$ zu überprüfen.
5. Positive Vorfaktoren sind bei der Normierung von Vektoren irrelevant. Damit meine ich folgendes: Seien $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $v, w \in \mathbb{R}^n$ sodass $v = \alpha w$, dann gilt $\hat{v} = \hat{w}$, wobei Vektoren mit Hut die normierten Varianten von v und w seien. Die Begründung ist:

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{\alpha w}{\|\alpha w\|} = \underbrace{\frac{\alpha}{|\alpha|}}_{=1} \frac{w}{\|w\|} = \hat{w}$$

Ist der Vorfaktor α dagegen negativ, so ändert sich hierbei das Vorzeichen des Vektors. Man kann hier beispielsweise das “Minus” von α in den Vektor v absorbieren und dann α wegfällen lassen, oder sich das Vorzeichen merken und nachträglich hinzufügen.

6. Normalerweise ist es wichtiger die Prinzipien zu verstehen als zu 100 Prozent exakt zu rechnen. Die meisten Dozenten ziehen nur wenige bis gar keine Punkte ab, wenn das Verfahren korrekt angewandt ist, aber ein Rechenfehler vorkommt - Professor Morel ist hier eine der wenigen Ausnahmen, ich kann nicht beurteilen, wie er die Kriterien für die Bewertung setzen wird.
7. In den meisten Fällen sind die Ausgangsdaten so gewählt, dass “angenehme” Ergebnisse herauskommen. Man kann sich zwar nicht zu 100 Prozent darauf verlassen, aber wenn bei einer Aufgabe als Ergebnis $\varphi = \frac{\pi * \cos(0.39234628373)}{13^e}$ herauskommt, dann lohnt es sich zu überprüfen ob man irgendwo einen Rechen- oder Denkfehler hat.

- Determinanten:

1. Ich würde empfehlen die Formeln für Determinanten von 2×2 und 3×3 Matrizen auswendig zu können. Für größere Matrizen würde ich dann die Laplace-Entwicklung verwenden.

2. Wichtige Rechenregeln für Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Allerdings gilt *nicht*: $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$!

3. Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dann gilt $\det(A) = \prod_{j=1}^n \lambda_j$.
4. Ist A eine obere (oder untere) Dreiecksmatrix (dazu zählen auch alle Diagonalmatrizen), dann ist die Determinante das Produkt aller Diagonaleinträge.
5. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}$ Vektoren, sodass

$$A = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$$

dann gibt die Determinante von A das n -dimensionale Volumen des Parallelotops an, das von den Vektoren $v_1, \dots, v_n$ aufgespannt wird. Mit anderen Worten: Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\det(A) = 0$ gilt.

6. Man kann den Gaußalgorithmus verwenden um die Determinante einer Matrix zu bestimmen, man muss dabei aber folgende Regeln beachten:
- (a) Die Addition einer Zeile oder Spalte lässt die Determinante unverändert.
 - (b) Die Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante.
 - (c) Die Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit $\alpha \in \mathbb{K}$ multipliziert auch die Determinante mit α .

- Inverse Matrizen:

1. Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Die Determinante der inversen Matrix ist genau das Inverse der Determinante der eigentlichen Matrix.
2. Eine Möglichkeit zur Bestimmung der inversen Matrix von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist mithilfe des erweiterten Gauß-Algorithmus. Dafür schreiben wir zuerst die verallgemeinerte Koeffizientenmatrix $(A | \mathbb{1}_n)$ und führen dann Zeilentransformationen durch, bis $(\mathbb{1}_n | B)$ dasteht. Dieses B ist dann das Inverse von A .
3. Ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht hat erstmal nichts mit der Diagonalisierbarkeit einer Matrix zu tun. Das sind unterschiedliche Begriffe! Beispielsweise kann eine Matrix mit Eigenwert 0 diagonalisierbar sein, aber niemals invertierbar.

- Diagonalisierung:

1. Folgende Aussagen sind äquivalent, können also verwendet werden um zu prüfen ob $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisierbar ist:
 - (a) A ist diagonalisierbar.

- (b) Es gibt eine Basis des $\mathbb{K}^n$ die aus Eigenvektoren von A besteht.
- (c) Für jeden Eigenwert stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.
- (d) Für jeden Eigenwert λ von A gilt: Ist α die algebraische Vielfachheit, dann gilt $\dim \ker(A - \lambda) = \alpha$
- (e) Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren und das Minimalpolynom besteht nur aus Linearfaktoren ersten Grades.

Insbesondere ist also alleine die algebraische Vielfachheit oder die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte bis auf Ausnahmefälle kein ausreichendes Kriterium um Diagonalisierbarkeit zu überprüfen.

2. Ausnahmefälle sind:

- (a) Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten, dann kann jeder von diesen Eigenwerten nur die algebraische Vielfachheit 1 haben und damit auch nur geometrische Vielfachheit 1. Diese Matrix ist also immer diagonalisierbar.
 - (b) Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix mit nur einem Eigenwert ist A genau dann diagonalisierbar, wenn A eine Skalarmatrix ist, da Skalarmatrizen in allen Basen gleich aussehen.
3. Symmetrische, reelle (bzw. hermitesche, komplexe) Matrizen sind immer diagonalisierbar.
4. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisierbar. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte und seien $v_1, \dots, v_n$ die dazugehörigen Eigenvektoren, das heißt $\forall j \in [n] : Av_j = \lambda_j v_j$, dann ist die Transformationsmatrix gegeben als

$$S = (v_1 | \dots | v_n)$$

und dann gilt

$$S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

das heißt die Reihenfolge der Eigenwerte auf der Diagonalen von D hängen davon ab in welcher Reihenfolge wir die Vektoren in S anordnen.

- Jordansche Normalform:

- 1. Jede Matrix deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt hat eine JNF, insbesondere hat also jede Matrix über $\mathbb{C}$ eine JNF.
- 2. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom $\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (X - \lambda_n)^{\alpha_n}$, dann gibt uns die algebraische Vielfachheit α_j die Summe der Größe aller Blöcke zu λ_j an.

Die Dimension des Eigenraums gibt uns die Anzahl der Blöcke an. Sind wir also nur an der Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ_j interessiert, dann bestimmen wir $\dim \ker(A - \lambda_j)$.

Wollen wir höhere Haupträume bestimmen, dann ist $\dim \ker(A - \lambda_j)^k$ die Summe der Dimensionen des ersten bis k -ten Hauptraums. Das heißt: Sobald wir eine Potenz k bestimmt haben, sodass $\dim \ker(A - \lambda_j) + \dots + \dim \ker(A - \lambda_j)^k = \alpha_j$ gilt, können wir aufhören, da sich die Matrix nicht mehr verändern wird.

3. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix mit Minimalpolynom $\mu_A(X) = (X - \lambda_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (X - \lambda_r)^{\beta_r}$, dann gibt uns die Vielfachheit β_j die Größe des größten Jordanblocks zu λ_j an. Insbesondere gilt: Zerfällt das Minimalpolynom in Linearfaktoren und gilt $\beta_1 = \dots = \beta_r = 1$, dann ist die Matrix A diagonalisierbar.
4. Genau wie bei der Diagonalisierung einer Matrix ist die Reihenfolge der Basisvektoren für die Reihenfolge der Jordanblöcke relevant. Sind $B_1, \dots, B_r$ die Jordanbasen die zu den Blöcken $J_1, \dots, J_r$ gehören, dann müssen wir

$$S = (B_1 \dots B_r)$$

wählen, damit

$$S^{-1}AS = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_r)$$

gilt. (Hier verstehen wir $\text{diag}(J_1, \dots, J_r)$ als die Blockdiagonalmatrix die auf der Diagonalen $J_1, \dots, J_r$ als Blöcke hat.)

- Skalarprodukte und Bilinearformen:

1. Eine $\mathbb{K}$ -Bilinearform auf dem $\mathbb{K}$ -Vektorraum V ist eine Abbildung $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ die in beiden Argumenten linear ist. Es gilt also für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y, z \in V$, dass

$$B(x, y + \alpha z) = B(x, y) + \alpha B(x, z)$$

$$B(x + \alpha z, y) = B(x, y) + \alpha B(z, y)$$

Sei nun $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto x^T A y \end{aligned}$$

immer eine Bilinearform.

Sei nun V zusätzlich ein euklidischer Vektorraum (also insbesondere ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum) und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt, dann gilt $\langle x, y \rangle_A = \langle x, Ay \rangle$.

2. Eine $\mathbb{K}$ -Bilinearform B auf V ist symmetrisch, wenn $\forall x, y \in V : B(x, y) = B(y, x)$ gilt. Wird B von einer Matrix A induziert, dann ist das äquivalent dazu, dass A eine symmetrische Matrix ist.
3. Eine symmetrische $\mathbb{R}$ -Bilinearform B auf V ist positiv definit, wenn $\forall x \in V \setminus \{0\} : B(x, x) > 0$ gilt. Wird B von einer Matrix A induziert, dann ist das äquivalent dazu, dass A eine positiv definite Matrix ist.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn $\forall x \in V \setminus \{0\} : x^T A x = \langle x, Ax \rangle > 0$ gilt. Alternativ: A ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A größer als Null sind.

Häufig ist eine dieser beiden Methoden sehr viel schneller als die andere - wenn man vorher bereits geprüft hat ob die Matrix diagonalisierbar ist, dann kennt man üblicherweise die Eigenwerte. Möchte man nachher noch Vektoren bezüglich des durch A induzierten Skalarprodukts normieren, ist es dagegen vorteilhaft, wenn man $x^T A x$ für einen allgemeinen Vektor bestimmt.

4. Ist A eine Matrix und wir sollen prüfen ob $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ ein Skalarprodukt ist, dann müssen wir eigentlich nur Eigenschaften der Matrix A überprüfen.
5. Ist V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt, dann wird durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm auf V induziert. Weiter wird durch $\cos(\angle(x, y)) := \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ ein Winkel auf V induziert. Mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens (wobei wir natürlich die hier definierte Norm und das hier definierte Skalarprodukt verwenden) kann dann eine ONB bezüglich dieses Skalarprodukts bestimmt werden.

Insbesondere kann für ein von einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ induziertes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ eine ONB bestimmt werden. In diesem Fall kann es hilfreich sein vor Beginn einmal für einen allgemeinen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ den Term $\langle x, x \rangle_A$ zu bestimmen und die Norm immer von diesem Ergebnis aus zu bestimmen, statt jedesmal explizit die Matrixmultiplikation durchzuführen.

- Matrizen mit Parametern: Sei dazu $A_a \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix die von $a \in \mathbb{R}$ abhängt.
 1. Üblicherweise kann man einige der Aussagen unabhängig von dem genauen Wert von a bestimmen - es macht in den allermeisten Fällen keinen Unterschied, welchen Wert man für a wählt, wenn man das charakteristische Polynom einer Matrix bestimmt. Erst danach, wenn man die Nullstellen dieses Polynoms kennt, kann man dann verschiedene Fälle sinnvoll wählen.
 2. Bei der Wahl von Eigenvektoren muss man vorsichtig sein. Es kann sein, dass zwei Vektoren je nach Wahl von a entweder linear abhängig oder linear unabhängig sind. Beispielsweise sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $a \neq \frac{1}{2}$ linear unabhängig aber für $a = \frac{1}{2}$ nicht.

3. Je nachdem wie man eine Aufgabe löst, kann man vielleicht irgendwann durch einen Term teilen, der von a abhängt. Hier sollte man immer acht geben, dass man nicht durch 0 teilt.
- Permutationen:
 1. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden. Hierbei können sogar Transpositionen so gewählt werden, dass sie immer nur zwei nebeneinander liegende Objekte vertauschen.